**Livro: Probabilidade - Aplicações à Estatística – Paul L. Meyer**

**Capitulo 7 – Caracterização Adicional de Variáveis Aleatórias.**

**Problemas**

1. Determine o valor esperado das seguintes variáveis aleatórias:
   1. A varável aleatória definida no Probl. 4.1.
   2. A varável aleatória definida no Probl. 4.2.
   3. A varável aleatória definida no Probl. 4.6.
   4. A varável aleatória definida no Probl. 4.18.
2. Mostre que não existe para variável aleatória definida no Probl. 4.25.
3. Os valores abaixo representam a distribuição de probabilidade de , a procura diária de um certo produto. Calcula :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| : |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | . |

1. Na produção de petróleo, a temperatura e destilação (graus centígrados) é decisiva na determinação da qualidade do produto final. Suponha-se que seja considerada uma variável aleatória uniformemente distribuída sobe .

Admita-se que produzir um galão de petróleo custe dólares. Se o óleo for destilado a uma temperatura menor que , o produto é conhecido como nafta e se vende por dólares o galão. Se o óleo for destilado a uma temperatura maior que , o produto é denominado óleo refinado destilado e se vende por dólares o galão. Determinar o lucro líquido esperado (por galão).

1. Uma certa liga é formada pela reunião da mistura em fusão de dois metais. A liga resultante contém uma certa percentagem de chumbo , que pode ser considerada uma variável aleatória. Suponha que tenha a seguinte fdp:

Suponha-se que , o lucro líquido obtido pela venda dessa liga (por libra), seja a seguinte função de percentagem do chumbo contida: . Calcule o lucro esperado (por libra).

1. Suponha que um dispositivo eletrônico tenha uma duração de vida (em unidades de 1000 horas), a qual é considerada como uma variável aleatória contínua, com a seguinte fdp:

Suponha que o custo de fabricação de um desses dispositivos seja . O fabricante vende a peça por , mas garante o reembolso total se . Qual será o lucro esperado por peça, pelo fabricante?

1. As 5 primeiras repetições de um experimento custam cada uma. Todas as repetições subsequentes custam cada uma suponha que o experimento seja repetido até que o primeiro resultado bem sucedido ocorra. Se a probabilidade de um resultado bem sucedido for sempre igual a , e se as repetições forem independentes, qual será o custo esperado da operação completa?
2. Sabe-se que um lote contém 2 peças defeituosas e 8 não-defeituosas. Se essas peças forem inspecionadas ao acaso, uma após outra, qual será o numero esperado de peças que devem ser escolhidas para inspeção, a fim de removerem-se todas as peças defeituosas?

Veja Prob. 2.21, com

1. Um lote de 10 motores elétricos deve ser ou totalmente rejeitado ou vendido, dependendo do resultado do seguinte procedimento: dois motores são escolhidos ao acaso e inspecionados. Se um ou mais forem defeituosos, o lote será rejeitado; caso contrário, será aceito. Suponha que cada motor custe e seja vendido por . Se o lote contiver 1 motor defeituoso, qual será o lucro esperado do fabricante?
2. Suponha que , a demanda diária de uma peça, seja uma variável aleatória com a seguinte distribuição de probabilidade:
   1. Calcule a constante .
   2. Calcule a demanda esperada.
   3. Suponha que uma peça seja vendida por . Um fabricante produz diariamente peças. Qualquer peça que não tenha sido vendida ao fim do dia, deve ser abandonada, com um prejuízo de .
      1. Determine a distribuição de probabilidade do lucro diário, como uma função de.
      2. Quantas peças devem ser fabricadas para tornar máximo o lucro diário esperado?

tem valor máximo quando .

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  | 0 | 5 | 7,33 | 7 | 4,89 | 1,89 | -1,11 |

Ou seja .

* 1. Com , efetue alguns cálculos para achar qual o valor de minimiza no Ex. 7.12.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| E(X) | 65 | 50,5 | 49,5 | 50,5 | 51,6 |

* 1. Empregando os valores acima de e , e tomando determine, para casa um desses valores de , se o “teste de grupo” é preferível.

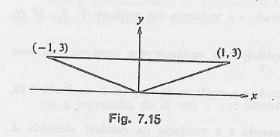
para os três casos portanto em nenhum deles o “teste de grupo” é preferível.

1. Suponha que e seja, variáveis aleatórias independentes, com as seguintes fdp:
   1. Determine a fdp de .
   2. Obtenha por duas maneiras:
      1. Empregando a fdp de , como foi obtida em (a);
      2. Diretamente, sem empregar a fdp de .
2. Suponha que tenha a fdp: . Seja .
   1. Calcule , empregando a fdp de .
   2. Calcule , sem empregar a fdp de .
3. Um dado equilibrado é jogado 72 vezes. Chamando de o número de vezes que aparece o seis, calcule .
4. Determine o valor esperado e a variância das variáveis aleatórias e do Probl. 5.2.
5. Determine o valor esperado e a variância da variável aleatória do Probl. 5.3.
6. Determine o valor esperado e a variância das variáveis aleatórias e do Probl. 5.5.
7. Determine o valor esperado e a variância das variáveis aleatórias e do Probl. 5.6.
8. Determine o valor esperado e a variância das variáveis aleatórias e do Probl. 5.7.
9. Determine o valor esperado e a variância da variável aleatória do Probl. 5.10, em cada um dos três casos.
10. Determine o valor esperado e a variância da variável aleatória do Probl. 6.7.
11. Determine o valor esperado e a variância da variável aleatória do Probl. 6.11.
12. Determine o valor esperado e a variância da variável aleatória do Probl. 6.13.
13. Suponha que seja uma variável aleatória, para a qual e . Para quais valores positivos de e deve ter valores esperado e variância ?
14. Suponha que , uma tensão aleatória, varie entre e volt e seja uniformemente distribuída sobre esse intervalo. Suponha que o sinal de seja perturbado por um ruído aleatório independente, aditivo, , o qual seja uniformemente distribuído entre e volts.
    1. Determine a tensão esperada do sinal, levando em conta o ruído.
    2. Determine a potencia esperada quando o sinal perturbado for aplicado um resistor de ohms.
15. Suponha que seja uniformemente distribuída sobre . Determine a variância de .
16. Um alvo é constituído de três círculos de raios . Tiros dentro do círculo interior valem 4 pontos, dentro do anel seguinte valem 3 pontos, e dentro do anel exterior valem 2 pontos. Tiros fora do alvo valem zero. Seja a variável aleatória que representa a distância do ponto de impacto ao centro do alvo. Suponha que a fdp de seja . Calcule o valor esperado do escore depois de 5 tiros.
17. Suponha que a variável continua tenha a fdp

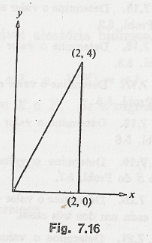
Seja . Calcule :

* 1. Diretamente, sem primeiro obter a fdp de .
  2. Primeiramente, obtendo a fdp de .

1. Suponha que a variável aleatória bidimensional seja uniformemente distribuída sobre o triângulo da Fig. 7.15. Calcule e .

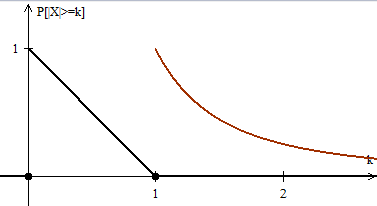


1. Suponha que seja uniformemente distribuída sobre o triângulo da Fig. 7.16.

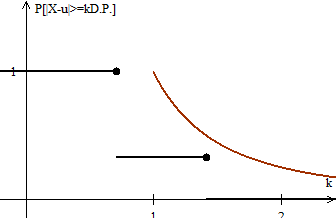


* 1. Estabeleça a fdp marginal de e a de .
  2. Calcule e .

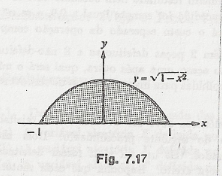
1. Suponha que e sejam variáveis aleatórias para as quais . Empregando o Teor. 7.7, obtenha uma aproximação de e , onde .
2. Suponha que e sejam variáveis aleatórias independentes, cada uma delas uniformemente distribuída sobre . Seja .
   1. Empregando o Teor. 7.7, obtenha expressões aproximadas para e .
   2. Empregando o Teor. 6.5, obtenha a fdp de , e a seguir, determine pos valores exatos de e . Compare-os com (a).
3. Mostre que se for uma variável aleatória contínua, com a fdp tendo a propriedade de que o gráfico de seja simétrico em relação a , então , desde que exista. (Veja o Ex. 7.16.)
   1. Suponha que a variável aleatória tome os valores e , cada um deles com probabilidade . Considere como uma função de . Em um gráfico, marque esta função de e, no mesmo sistema de coordenadas, marque o limite superior da probabilidade acima, tal como é dada pela desigualdade de Tchebycheff.



* 1. O mesmo que em (a), exceto que .

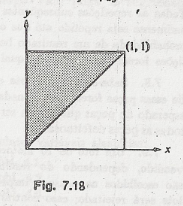


1. Compare o limite superior da probabilidade , obtida pela desigualdade de Tchebycheff, com a probabilidade exata se for uniformemente distribuída sobre .
2. Verifique a Eq. (7.17).
3. Suponha que a varável aleatória bidimensional seja uniformemente distribuída sobre , onde é definida por . (Veja a Fig. 7.17.) Calcule , o coeficiente de correlação.

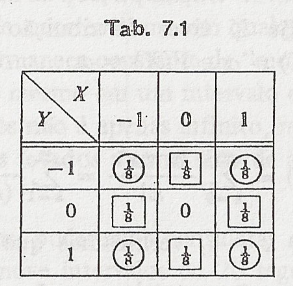


1. Suponha que a variável aleatória bidimensional tenha fdp dada por

(Veja a Fig. 7.18.) Determine o coeficiente de correlação .



1. O exemplo a seguir ilustra que não implica independência. Suponha que tenha uma distribuição de probabilidade conjunta dada pela Tab. 7.1.



* 1. Mostre que e consequentemente .
  2. Explique por que e não são independentes.
  3. Mostre que este exemplo pode ser generalizado como se segue. A escolha do número não é decisiva. O que é importante é que todos os valores circundados sejam iguais, todos os valores enquadrados sejam iguais e o valor central seja zero.

1. Suponha que e sejam dois eventos associados ao experimento . Suponha que e . Sejam as variáveis aleatórias e definidas assim:

se ocorrer, e em caso contrário,

se ocorrer, e em caso contrário.

Mostre que implica que e sejam independentes.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

1. Demostre o Teor. 7.14.
2. Para a variável aleatória definida no Probl. 6.15, calcule , e verifique que e .

Não existe Probl. 6.15 então consideremos o Probl. 6.14.

1. Demonstre o Teor. 7.16.
2. Demostre o Teor. 7.17. [sugestão: para o caso contínuo, multiplique a equação por , a fdp de , e integre de a . Faça a mesma coisa, empregando e, depois, resolva as duas equações resultantes para e para .]
3. Demonstre o Teor. 7.18.
4. Se forem variáveis aleatórias não-correlacionadas, com desvios-padrões , respectivamente, e se e , calcule o coeficiente de correlação entre e .
5. Suponha que ambas as curvas de regressão da média sejam, de fato, lineares. Particularmente, admita que e .
   1. Determine o coeficiente de correlação .
   2. Determine e .
6. Considere a previsão de tempo com duas possibilidades: “chove” ou “não chove” nas próximas 24 horas. Suponha que . O previsor marca 1 ponto se ele estiver correto e ponto se não estiver. Ao fazer previsões, um previsor sem capacidade escolhe de qualquer maneira, ao acaso, dias, para afirmar que “chove” e os restantes dias para afirmar “não chove”. Seu escore total de pontos é . Calcule e e encontre qual o valor de para o qual é o maior. [Sugestão: Faça , dependendo de que a previsão esteja correta ou não. Então . Observe que os não são independentes.